Justus-Liebig-Universität Gießen
Zentrum für Philosophie und Grundlagen der Wissenschaft

Referat über

„Kreis, Zahl, Mengen – Eine Diskussion über die Gegenstände der Mathematik“
von Heinz-Dieter Ebbinghaus

erschienen in

„Denken unterwegs – Fünfzehn metawissenschaftliche Exkursionen“
Herausgegeben von Heinz-Dieter Ebbinghaus und Gerhard Volmer
Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1992.

Referent: Diego Rybski
Termin: 6.2.2007, 16:00-18:00 c.t., Raum C214

Seminar: Natur und Zahl – die Mathematisierung der Welt
Prof. Dr. Bernulf Kanitscheider
WiSe 2006/2007

0. Vorbemerkung

Bei dem Aufsatz von H.-D. Ebbinghaus handelt es sich um eine fiktive Diskussion erdachter Gesprächsteilnehmer:

Diskutant	Position	Arbeitsgebiet
Herr M.		Zahlentheorie
Frau K.	Konzeptualismus	Strömungsmechanik
Herr F.	Formalismus	Spieltheorie
Herr P.	Platonismus	Mengentheorie
Herr I.	Intuitionimus*)	Topologie

In dem Gespräch ist der Intuitionimus, welcher der Trennung von Gegenstand und Methode widerspricht, nicht vertreten (deswegen * in der Tabelle). Zwar besteht eine „enge Wechselbeziehung" (S.9) zwischen Gegenständen und Methoden der Mathematik, dennoch bespricht der Autor in erster Linie die Gegenstände. Der Platonismus sowie der Formalismus gehörten zu den älteren Strömungen.

In dem Text entscheidet sich Ebbinghaus nicht für eine dieser Strömungen, sondern schlüpft vielmehr abwechselnd in die unterschiedlichen Rollen, um Ihre Perspektiven und Argumente zu verdeutlichen.

1. Einleitung

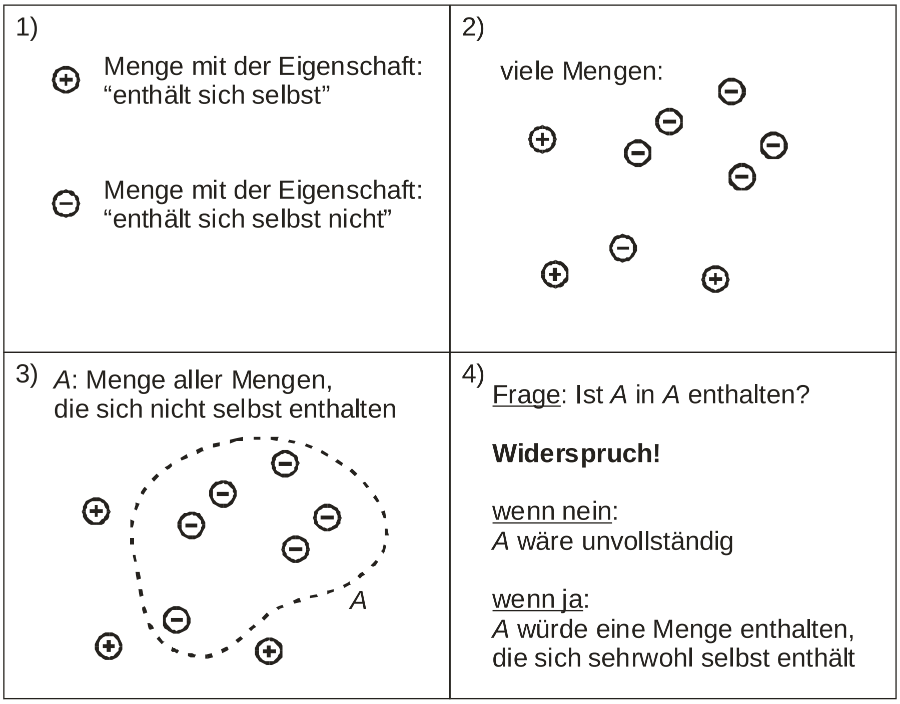
Der Autor beginnt die Debatte mit Beispielen, die für die verschiedenen Positionen charakteristisch sind:

- Für den Platonismus ist die Frage um die Existenz geometrischer Objekte von Bedeutung. Dabei wird etwa einer idealen Kreislinie Realität zugesprochen, da geometrische Objekte unabhängig vom menschlichen Dasein sind.
- Als interessanter Aspekt aus dem Bereich des Formalismus wird die Unendlichkeit genannt. Durch Addition zu einer großen Zahl läßt sich immer eine noch größere erzeugen. Der einfache Vorgang der Nachfolgerbildung ist „eine unüberwindbare Strategie" (S.10).
- Für den Konzeptualismus nennt der Autor die imaginäre Einheit, deren Name auf Descartes Ausdruck „eingebildete Zahl" zurückgeht. Einem Zitat von Gauß zufolge gestand dieser den komplexen Zahlen zunächst nicht den gleichen Status wie den reellen Zahlen zu. Die Gegenstände der Mathematik „sind Konzepte, die sich in oft langen geistesgeschichtlichen Prozessen entwickeln" (S.11). Sie entstehen durch Kommunikation unter den Mathematikern, wobei die Verwendung ihrerseits zur Entstehung anderer (neuer) Konzepte führt.

Anhand der Integralrechnung veranschaulicht der Autor die Relevanz der drei Beispiele. Es stehen Methoden zur Verfügung (im Text „bewährte Techniken“ (S.11) zur Integralberechnung), dabei kann es zu Begriffsbildung kommen (im Text „neuen Begriff herauszukristallisieren“, S.11) und Objekte können existieren (im Text „so gewinnt [das Integral] für mich zuweilen Gestalt“, S.11). Ferner beschreibt Ebbinghaus das Erstaunen, wenn Ergebnisse die Verknüpfungen zwischen verschiedenen Richtungen zutage treten lassen.
Aus platonischer Sicht gliedert sich ein solches Gefüge „mathematischer Sachverhalte“ (S.12f) ein, in ein „Universum platonischer Ideen“ (S.12). Folglich existierten mathematische Objekte und Bereiche, wie auch die platonische Idee (nach Heinrich Scholz). Aus der Perspektive des Formalismus entdecke der/die MathematikerIn Objekte, z.B. die reellen Zahlen, und somit weitere platonische Idee, und mache sie zum Gegenstand mathematischer Betrachtungen, erschaffe aber nichts Neues. Diese Position steht jedoch im Gegensatz zur Sichtweise des Konzeptualismus. Dedekind zitierend seien die reellen Zahlen lediglich eine Definition, also keine Schöpfung.

2. Platonismus

Ein großes Problem sind mathematische Begriffsbildungen, da sie widerspruchsvoll sein können. Der Autor stellt, aus formalistischer Sicht, die Frage, wie Begriffsbildungen platonische Ideen repräsentieren können, wenn sie einen Widerspruch enthalten. Es wird der Cantorsche Mengenbegriff eingeführt, demzufolge man „wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens“ (S.12) zu einer Menge zusammenfassen kann. Das Fregesche Komprehensionsaxiom besagt, daß man zu jeder Eigenschaft die Menge aller Objekte mit dieser Eigenschaft bilden kann. Über Georg Cantor (Mengenbegriff) und Gottlob Frege (Komprehensionsaxiom) gelangt Ebbinghaus sodann zu dem prominenten Beispiel der Russelsche Antinomie, also ein Widerspruch zwischen zwei als gültig angesehenen Sätzen. Sie wurde 1901 als „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ von Bertrand Russell formuliert.



[Abbildung zur Verdeutlichung der Russelschen Antinomie „Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten“ (eigener Entwurf)]

Äquivalente Formen stellen das Barbier-Paradoxon (Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert ihn?) und das Paradoxon des Epimenides („Alle Kreter sind Lügner“ behauptet Epimenides ein Kreter) dar.
Wie kann man nach diesem mathematischen Widerspruch wissen, daß nicht noch andere Begriffsbildungen inkonsistent sind? Aus formalistischer Sicht fragt sich Ebbinghaus außerdem welche Berechtigung dann noch der Platonismus habe. Tatsächlich werde nach der ‚Entdeckung’ der Russellschen Antinomie kein schrankenloser Platonismus mehr verfolgt.

Zur Gunsten des Platonismus beschreibt der Autor zwei weitere erstaunliche Sachverhalte.

- Die Mandelbrotmenge M ist gegeben durch die komplexen Zahlen c für die $z_{n+1}=z_n^2+c$ mit $z_0=0$ für n gegen unendlich beschränkt bleibt. Das Innere des bekannten Apfelbrotmännchens stellt die Menge in der komplexen Ebene dar. Dieser einfache Zusammenhang bildet eine „auch im Kleinsten immer wieder neu entfaltende Formenfülle“ (S.13, Abbildung auf S.14).
- Goldbachsche Zahlen sind Zahlen, die sich als Summe zweier Primzahlen schreiben lassen, also z.B. 4, 6, 8, 10, 12, 14 oder 16=5+11. Die Goldbachsche Vermutung besagt daß alle geraden Zahlen größer als 3 Goldbachsch sind. Folglich sind alle geraden Zahlen größer als 3 Goldbachsch oder es gibt mindestens eine,

die es nicht ist. Die Tatsache, daß eine der beiden Aussagen/Möglichkeiten wahr ist, spreche für die Existenz der natürlichen Zahlen an sich.

„Man kann mit einem Tastendruck unseren Planeten zerstören und mit ihm alle mathematischen Werke, die bisher verfaßt wurden." (S.13) stellt Ebbinghaus aus formalistischer Perspektive entgegen. Axiomensysteme und Computereingaben bezeichnet er lediglich als „syntaktische Gebilde" (S.15). Ungeahnte Entwicklungen ergeben sich dann aus einem Programm und den Regeln des Schließens. In letzteren solle man allerdings eine Konvention sehen, auch wenn sie nur von wenigen Mathematikern hinterfragt werden.
Ob sich diese „höchst plausibel" (S.15) erscheinenden Regeln rechtfertigen lassen, hänge möglicherweise davon ab, als was man die Gegenstände der Mathematik betrachtet. Somit würde die Mathematik ihren objektiven und unumstößlichen Charakter verlieren. Der „ureigene erkenntnistheoretische Standpunkt" (S.15) bestimmte die Haltung ihr gegenüber.
Andererseits stellt sich die Frage, wie dies mit den technischen Anwendungen der Mathematik vereinbar ist. Sind Flugzeugabstürze auf diese „fragwürdigen Schlußregeln" (S.15) zurückzuführen? „Wie stünde es um das Weltbild der Physik" (S.15)?
Daraufhin formuliert Ebbinghaus die Frage nach einer Rechtfertigung der Mathematik, unabhängig von erkenntnistheoretischen Standpunkten. Schließlich wird sie heute weltweit von Mathematikern unterschiedlichster Kulturkreise betrieben, die keinen gemeinsamen erkenntnistheoretischen Ursprung haben. Da es bis auf die Russellsche Antinomie keine weiteren größeren Probleme gegeben habe, zeigt sich der Autor also zuversichtlich.

Die Russellsche Antinomie führte zu einer Revision der Mengenvorstellung. Aus einem platonischen Standpunkt steht der heutige Mengenbegriff dem Zahlenbegriff in seiner Natürlichkeit nicht mehr nach. Spricht man von der Existenz der Dinge, die man sieht, so kommt das einer Verpflichtung gleich, genau zu prüfen, daß sich keine Fehler oder Widersprüche eingeschlichen haben. Die Russellsche Antinomie stellt also eine „Verletzung der Sorgfaltspflicht" (S.16) dar. Aus einem formalistischen Standpunkt eines bedeutungsorientierten Linguisten sei sie (die Russellsche Antinomie) jedoch nicht als bloßer „Betriebsunfall" (S.16) zu sehe, was der Autor aber nicht weiter ausführt. Dagegen können der selbstkritische Platonismus als Vorbild für mathematische Konzeptionen dienen, „sich durch ihre Einfachheit und logische Geschlossenheit auszeichnen und allgemein Anerkennung finden" (S.16, nach P. Bernays).

3. Formalismus

Einen formalistischen Standpunkt einnehmend drückt Ebbinghaus zwei Aufgaben aus, die der Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Mathematik entstammen:

1. Es muß klar sein, was unter einer Theorie zu verstehen ist, z.B. Analysis.
2. Es muß klar sein, welche Mittel eingesetzt werden.

Das bedeutet insbesondere, daß man z.B. nicht die Analysis einsetzen kann, um die Widerspruchsfreiheit der Analysis zu zeigen. Der Autor vergleicht dies mit dem Versuch Münchhausens, sich „am eigenen Schopf aus dem Sumpf zu ziehen" (S.17).

Als Beispiel nennt er den Beweis, „daß der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen deren kleinstes gemeinsames Vielfaches teilt" (S.17). In formalistischer Hinsicht sollte man einen „präzise definierten Katalog […] finiter Hilfsmittel" (S.17) verwenden. ‚Finit', weil Hilfsmittel der Mengenlehre, die auf unendliche Gesamtheiten zurückgreifen, nicht einbezogen werden. Platonisch gesehen sollen bestimmte Hilfsmittel zugelassen sein, um Widerspruchsfreiheit zu zeigen, da „Beweise aus dem Nichts" (S.17) nicht möglich sind.

Bei der ersten Aufgabe, die formalistische „Präzisierung dessen, was eine Theorie […] ausmacht" (S.17), bezieht sich Ebbinghaus auf David Hilbert. Bei der „axiomatisch-deduktiven Methode" (S.17) wird eine Theorie mit den Regeln des Schließens aus einem Axiomensystem deduziert. Aus der Sicht des Formalismus lassen sich theoriespezifische Komponenten der Axiome sowie universelle Komponenten der Regeln exakt erfassen:

- Axiome: es bestehen formal definierte Sprachen
- Regeln des Schließens: System weniger Regeln, im Prinzip Vorschriften zur Bearbeitung von Zeichenreihen (vgl. Aussagenlogik)

Somit reduziere sich „die Frage nach der Widerspruchsfreiheit einer Theorie" (S.18) auf ein „rein kombinatorisches Problem" (S.18).

Aus der Perspektive des Formalismus ließen sich außerdem „praktisch alle mathematischen Theorien" (S.18) in die Mengenlehre einbetten, so daß sich das Problem der Widerspruchsfreiheit darauf verringert, Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre zu zeigen. Ebbinghaus fährt fort, daß konzeptuell betrachtet, sich die Schulden nicht verringern, wenn man sie bei einem Gläubiger konzentriert. Andererseits ist der „Wert der Übersichtlichkeit" (S.18) nicht zu unterschätzen.

Dem Text folgend, kommt der Autor nun zurück zu den Axiomen. Oft liest man, daß Axiome wegen ihrer Selbstverständlichkeit keines Beweises bedürften. Hilbert verstand unter einem Axiomensystem ein System von Zeichenreihen ohne inhaltliche Bedeutung. Anstelle von „Punkt, Gerade, Ebene müsse man auch Tisch, Stuhl, Bierseidel sagen können" (S.18). Platonisch betrachtet läßt sich dies jedoch nicht halten. Das Parallelenaxiom besagt (in etwa), daß es zu jeder Geraden eine Parallele gibt, so daß sie sich nicht schneiden. Es wird aber ungültig auf einer Kreisfläche. Der Autor bezweifelt also, daß man die Mathematik wirklich als formale Spielerei ohne Bedeutung ansehen kann. Jedoch war auch Hilbert kein Formalist. Mithilfe der formalen Kriterien sollte „die notwendige Exaktheit“ (S.19) erreicht werden. Selbst nach der Russellsche Antinomie hielt Hilbert an der Cantorschen Mengenlehre mit „infinitären Konstruktionen“ (S.19) fest. Es folgt ein Hilbert-Zitat: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können“ (S.19)! Andererseits hat Hilbert auch platonisch geprägte Ideen verfolgt und habe behauptet: „wenn willkürlich gesetzte Axiomensysteme sich als widerspruchsfrei erweisen, so existieren die durch sie definierten Dinge“ (S.19).

Als nächstes kommt Ebbinghaus auf Kurt Gödel, der in den 1930er Jahren gezeigt hat, daß Widerspruchsfreiheitsbeweise in der Regel nicht geführt werden können, selbst wenn man die Methoden aus derselben Theorie zuläßt, wie die für die man den Beweis erbringen will (siehe oben, Analysis und Münchhausen). Folglich sei es nicht auszuschließen, daß die Mathematik widerspruchsvoll ist. Genauer gesagt geht die Problematik aus der Kombination seines Vollständigkeitssatzes und seines Unvollständigkeitssatzes hervor.
Aus der Sicht des Platonismus sei der Formalismus also gescheitert und umgekehrt sei der Platonismus aus der Sicht des Formalismus ebenfalls betroffen. Allerdings, so führt der Autor aus, „spricht einiges dafür, daß die Russellsche Antinomie der erste und letzte ernste Unglücksfall war“ (S.19). Trotzdem hat man nie eine echte Gewißheit über die Widerspruchsfreiheit der Mathematik.

4. Konzeptualismus

Der Konzeptualismus wurde bisher kaum diskutiert. Der Autor wirft die Frage in den Raum, wo der Mensch und die menschliche Kreativität bleiben, wenn man das Hilbert-Programm durchführt und mathematische Theorien formal axiomatisiert, so daß sie garantiert widerspruchsfrei wären, und gar von Maschinen deduziert werden könnten.
Formalistisch gesehen spreche nichts gegen eine automatische Beweisführung. Als Beispiel wird der Vier-Farben-Satz genannt. Er besagt, daß vier Farben ausreichen, um eine beliebige Landkarte so einzufärben, daß angrenzende Länder unterscheidbar bleiben. Die 1853 von Francis Guthrie aufgestellte Vermutung wurde 1977 (Ken Appel und Wolfgang Haken) mittels eines Beweises auf unter 2000 problematische Fälle reduziert, die dann automatisiert geprüft wurden. Im Prinzip steht dabei jedoch die Verifizierung des verwandten Computerprogramms noch aus.

Trotzdem erfordert die Mathematik „Phantasie und Kreativität“ (S.21), was nicht von Maschinen erbracht werden kann.

Ebbinghaus gibt auch die Risiken zu bedenken, die eine widerspruchsvolle Mathematik mit sicht brächte, z.B. Lehre, Studierende. Man sollte also alles versuchen, Widersprüche auszuschließen.
Auch von einem konzeptualistischen Standpunkt aus, ist Widerspruchsfreiheit anzustreben. Dabei wird die „Widerspruchsfreiheit der praktischen Mathematik“ (S.20) erwähnt. Gemeint ist das gute Funktionieren der Mathematik in Natur und Technik.
Ferner sind die Gegenstände der Mathematik (Kreise, Zahlen, Mengen, …) Konzeptionen des menschlichen Geistes, die aus einer langen, „mit anderen kultur- und geisteswissenschaftlichen Entwicklungen“ (S.21) verbundenen, Geschichte hervorgegangen sind. Hippasos habe gezeigt, daß das Verhältnis einer Seite und einer Diagonalen beim regelmäßigen Fünfeck nichtrational ist (vgl. Goldener Schnitt). Daraufhin sei der Frevler auf göttliches Geheiß hin im Meer ertrunken. Einer anderen Version zufolge, sei dies eine Bestrafung durch den Geheimbund der Pythagoräer (dem Hippasos angehörte) gewesen, weil er sein Wissen an die Öffentlichkeit trug und sein Ergebnis sich nicht mit ihrer Überzeugung deckte, daß die Welt sich vollständig durch ganze Zahlen beschreiben ließe.
Entscheidend ist, daß Hippasos die Notwendigkeit erkannt hat, „das Konzept Zahl weiter auszuformen“ (S.21) und somit „der Vorstellung von der Stetigkeit der reellen Zahlen“ (S.21) den Weg zu bereitete. Jedoch könne man aus formalistischer Sicht einwenden, daß die Eigenschaft des Kontinuierlichen noch keine endgültige mathematische Form darstelle, wenn man die Nichstandardanalysis (Abraham Robinson, 1961) betrachtet.
Wie die Geschichte gezeigt habe, wurden vermeintlich endgültige grundlegende Konzeptionen immer wieder überholt. Auch die Mathematik findet sich in geschichtlichen Phasen wieder, woraus wiederum neue Phasen und neue Auffassungen hervorgehen.

Ebbinghaus spricht von der „breiteren Form der Geschichtlichkeit“ (S.22), die mittels einer Momentaufnahme in der Entwicklung der Mengenlehre veranschaulicht wird. Cantor habe zwischen Mengenbildung unterschieden, die dem Menschen möglich sind, und solche die nur Gott möglich sind, – eine Abgrenzung, die auf Spinoza zurückgehe. Diese „intuitiv, theologisch geprägten“ (S.22) Überlegungen führten ihn dann zu einem Mengenbegriff ähnlich dem, wie man ihn heute verwendet. Daraufhin formuliert der Autor die konzeptuelle Forderung, die Mathematik nicht außerhalb dessen zu stellen, „was die Menschen bewegt“ (S.22), schließlich sei sie „tief in unser

Geistesleben verflochten“ (S.22). Die Geschichte der Menschheit schließe die Entwicklung der Mathematik sogar mit ein (S.24).

Anschließend wird die Frage geäußert, wie denn sichergestellt werden kann, „daß die Konzepte in den Köpfen der verschiedenen Mathematiker die gleichen sind“ (S.22), daß aus der Mathematik nicht eine Wissenschaft der dominierenden Kontroversen wird. Wie können, bei einer menschlichen Sichtweise der Mathematik, Dinge individuenübergreifend, also außerhalb der Individuen beschrieben werden?
Natürlich ist die Geschichte nicht ohne Kontroversen abgelaufen (Hippasos, Russell). Kontroversen stellten vielmehr „das Ferment für die Fortentwicklung der Konzepte“ (S.23) dar. Trotzdem können aus konzeptueller Sicht Kontroversen die Mathematik nicht beherrschen.

5. Schlußdiskussion

In der Analysis benutze man letztendlich in der einen oder anderen Form das Hilbertsche Axiomensystem und die Regeln der klassischen Logik. Treten Zweifel an einem Axiom auf, kann man verschiedene Varianten verfolgen und prüfen, „welche Variante sich als die fruchtbarere erweist“ (S.23). Auf diese Weise sei die nichteuklidische Geometrie (Physik, Kosmologie) entstanden, die das Parallelenaxiom nicht vorsieht.
Aus formalistischer Sicht läßt sich dies mit einer Art „Wenn-so-Mathematik“ (S.23) vergleichen, in Anlehnung an eine „Wenn-so-Philosophie“ (S.32, nach Heinrich Scholz), bei der Aussagen nur aufgrund genannter Voraussetzungen und Methoden getroffen werden.
Ebbinghaus sieht formalistisch einen spielerischen Charakter der Mathematik. Ein Spiel wird nach bestimmten Regeln gespielt. Macht es keinen ‚Spaß’ mehr, kann man es aufgeben, oder die Regeln ändern, spielt dann aber ein anderes Spiel.

Allerdings könne man nicht willkürlich vorgehen, schließlich bringe man Erfahrungen über Zeit, Raum, Nacheinander, Nebeneinander, Symmetrie, Anzahl usw. ein. Diesen Erfahrungen könne sich kein intelligentes Wesen entziehen. Konzeptuell bilden sie „eine starke normative Kraft“ (S.23), woraus sich der Erfolg in Naturwissenschaft und Technik ergebe. Allerdings gilt dies nur für die Größenordnungen unserer Erfahrungen, was nicht auf „die nichteuklidische Struktur des physikalischen Raumes“ (S.23) zutrifft.
Somit kehrt die Diskussion zurück zur Widerspruchsfreiheit der praktischen Mathematik. In der Technik arbeitet man stets mit begrenzter Genauigkeit, nämlich Computer mit einer begrenzten Zahl an Dezimalstellen. Reelle Zahlen stellen,

zunächst unabhängig von der Technik, eine Art Grenzwert der Approximation durch rationale Zahlen dar. Jedes Resultat über rationale Zahlen, das sich unter zu Hilfenahme der reellen Zahlen gewinnen läßt, kann auch unter Verwendung der „rationalen Zahlen und ihrer arithmetischen Struktur" (S.24, nach G. Takeuti) bewiesen werden. Die Verwendung der reellen Zahlen ist oft schlichtweg effizienter und weniger mühselig.

Platonisch gesehen ist „Bereitstellung und Verwendung idealisierter Strukturen" (S.24) eine wichtige Eigenschaft der Mathematik, wobei sich „diese Idealisierungen in ihrer Unausweichlichkeit nicht nur dem menschlichen Geist aufdrängen" (S.24), was wiederum für ihre Existenz spreche.

Aus der Perspektive des Formalismus kann man sich fragen, warum sich ein Techniker mit ungenauen Rechungen zufrieden geben soll (S.24). Die Einführung der reellen Zahlen ist also naheliegend, z.B. der Kreiszahl π, dessen Transzendenz von Ferdinand Lindemann gezeigt wurde.

Ebbinghaus nennt einen Einwand im Kontext der mathematischen Konzepte. Die Cantorsche Vermutung, „die Menge der reellen Zahlen folge ihrer Mächtigkeit unmittelbar der Menge der natürlichen Zahlen" (S.25, Cantorsche Kontinuumshypothese: CH) läßt sich heute weder beweisen noch widerlegen. Dies wird dadurch begründet, daß das heutige Mengenkonzept, bestimmt durch das Axiomensystem, nicht weit genug ausgebildet sei, um über die Größe der Menge der reellen Zahlen entscheiden zu können.

Da sich Konzepte permanent entwickeln, sind sie quasi zwangsweise unvollständig. Lange Zeit wurde es als paradox empfunden, daß die „Menge der natürlichen und die der geraden natürlichen Zahlen" (S.25) gleich viele Elemente enthalten (eigentlich gleiche Mächtigkeit), was zutrifft, da es unendliche Mengen sind. Daß man nicht weiß, ob die CH, wahr oder falsch ist, sieht Ebbinghaus als Aufforderung zur Weiterentwicklung des Mengenkonzeptes.