

# Multifractal Detrended Fluctuation Analysis: Application to Rainfall Records

**Diego Rybski**

Jan W. Kantelhardt, Armin Bunde,  
Shlomo Havlin

Vortragsdatum: 11.3.2004

DY 42.3 Do 12:00 H2

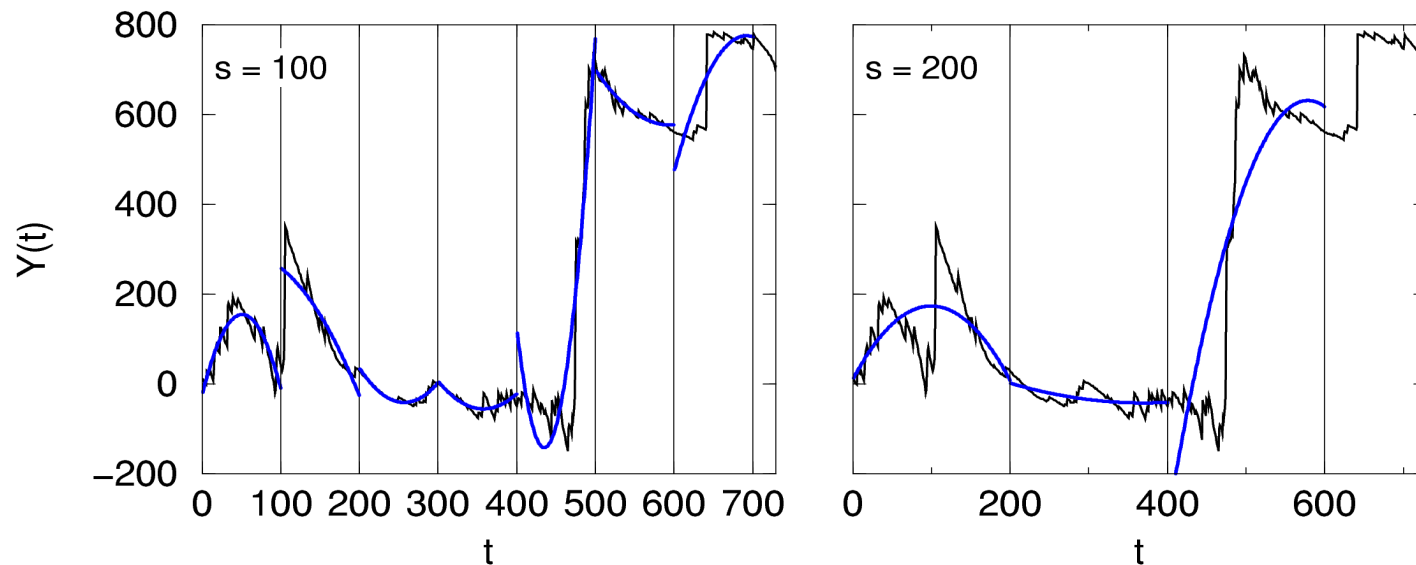
# Multifraktale Trendbereinigende Fluktuationsanalyse

(MF-DFA: Multifractal Detrended Fluctuationanalysis)

1. Kumulation der Reihe zum Profil:

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad i = 1, \dots, N$$

2. Unterteilung in  $N_s \equiv \text{int}(N/s)$  Segmente der Größe  $s$



# MF-DFA Fortsetzung

3. Bestimmung der lokalen Trends in jedem Segment als beste polynomiale Fits und Berechnung der Varianz des Profils zu den Fits:

$$F^2(\nu, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(\nu - 1)s + i] - y_\nu(i)\}^2$$

Ordnung des pol. Fits gibt Ordnung der DFA an (DFA1, DFA2, ...)

4. Mittelung über  $N_s$  Fenster:

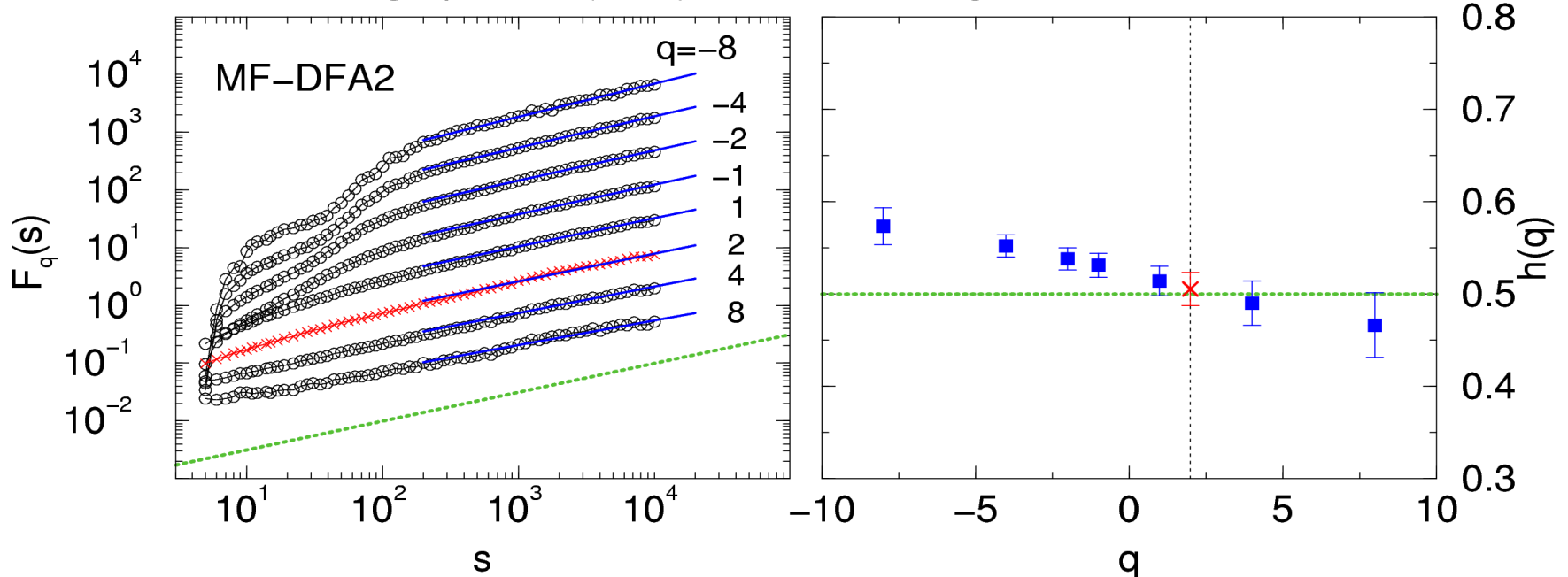
$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad \text{Moment } (q \neq 0)$$

5. Bestimmung des Skalenverhaltens der Fluktuationsfunktion in doppeltlogarithmischer Darstellung.  
Wenn Langzeitkorrelationen vorliegen, wächst die Fluktuationsfkt. auf großen Skalen potenzgesetzartig:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad \text{insbesondere gilt: } h(2) = 1 - \gamma/2$$

# Beispiel: Spokane

Niederschlag Spokane (USA), 1881–1994, täglich



- $q \gg 1$ : Segmente mit größten Fluktuationen dominieren
- $q \ll -1$ : Segmente mit kleinsten Fluktuationen dominieren
- $h(q) = h(2)$ : monofraktales Verhalten
- $h(q)$  hängt von  $q$  ab: multifraktales Verhalten

# Anpassungsfunktionen für $h(q)$ $\tau(q) = qh(q) - 1$

- Modifiziertes Multiplikatives Kaskaden Model

$$h(q) = \frac{1}{q} - \frac{\ln(a^q + b^q)}{q \ln 2}$$

zwei Parameter:  
 $a, b$  ( $0 < a, b < 1$ )

$$\Delta\alpha = h(-\infty) - h(+\infty) = (\ln b - \ln a) / \ln 2$$

- Bifraktal Model

$$h(q) = \begin{cases} a_1 & , q < q_x \\ q_x(a_1 - a_2) \cdot \frac{1}{q} + a_2 & , q > q_x \end{cases}$$

drei Parameter:  
 $a_1 > a_2$   $q_x$

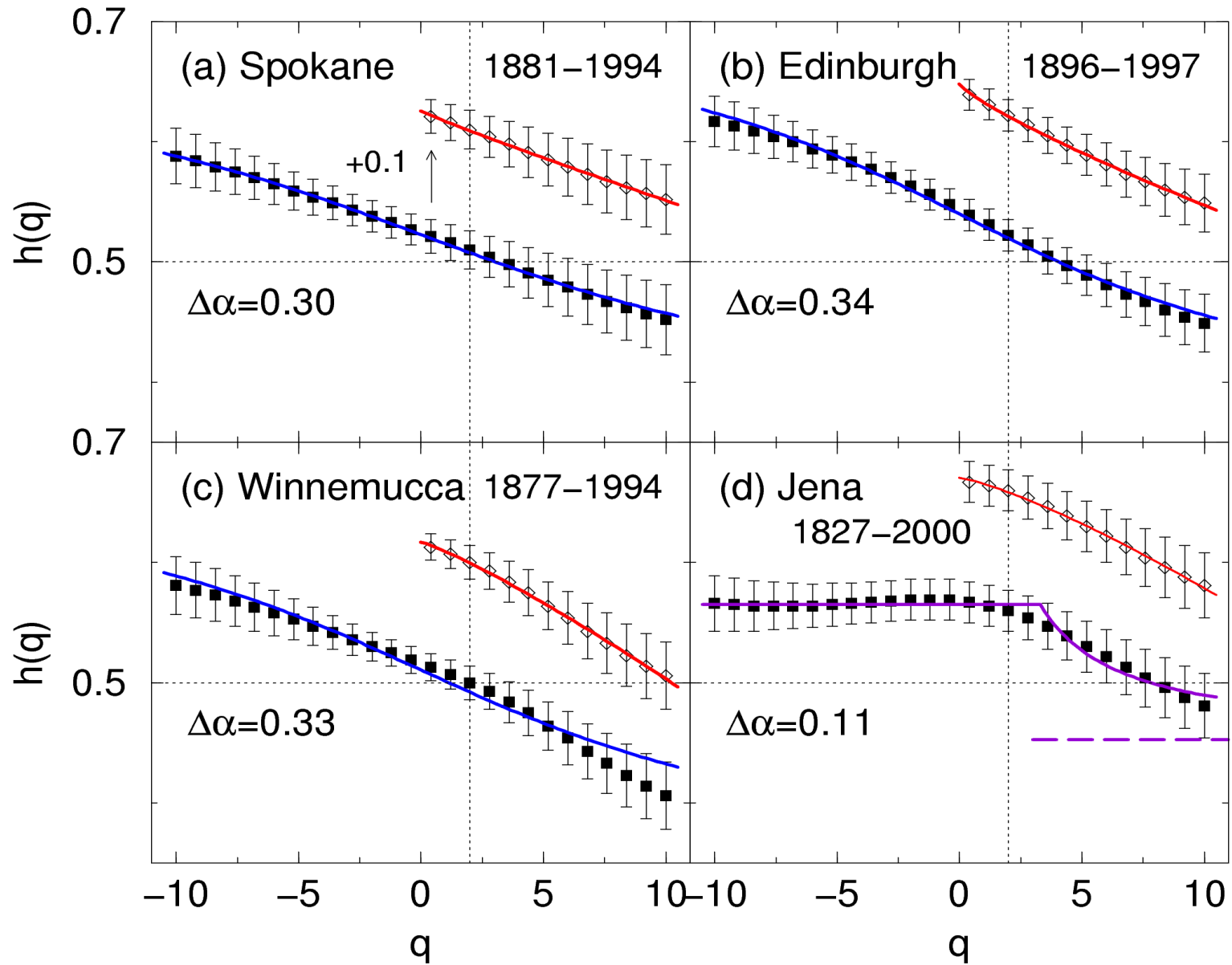
$$\Delta\alpha = a_1 - a_2$$

- Model nach Lovejoy und Schertzer

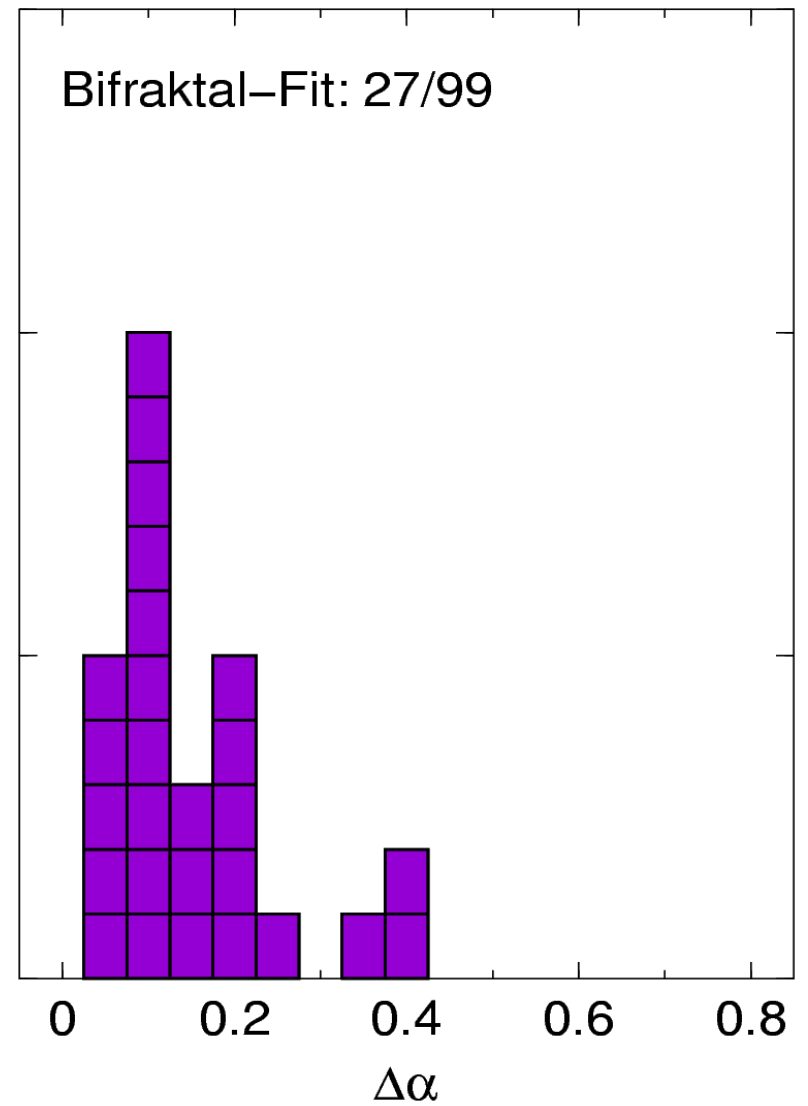
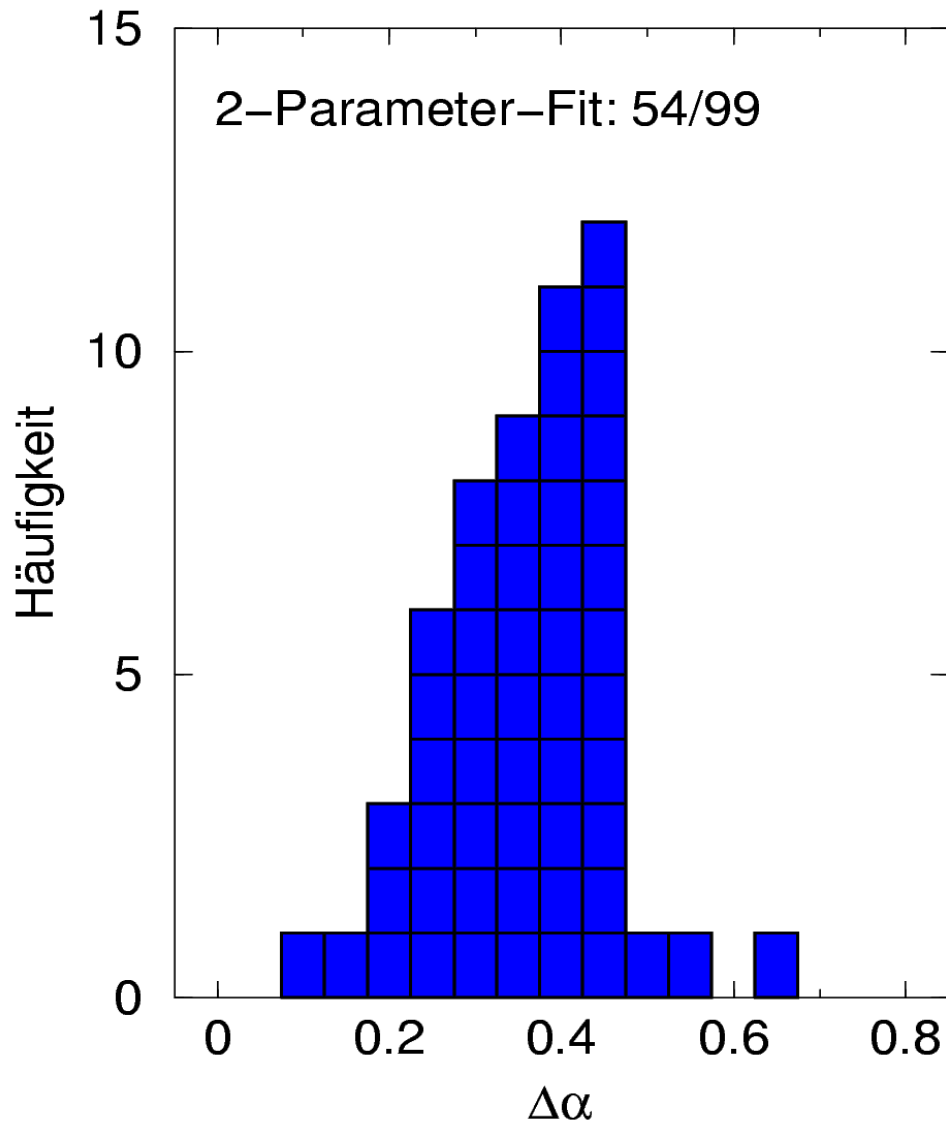
$$h(q) = 1 - \frac{C_1}{\alpha' - 1} (q^{\alpha' - 1} - 1) + \tilde{H} \quad 0 \leq q$$

drei Parameter,  $0 \leq C_1 \leq [\text{dim. of space}]$   $0 \leq \alpha' \leq 2$

# Beispiele



# Ergebnisse



# Zusammenfassung

- Model nach **Lovejoy** und **Schertzer** läßt sich an alle 99 Niederschlagsreihen anpassen; Beschränkung auf pos. Momente
- **negative Momente** sind beim 2-Parameter-Fit und beim Bifraktalen Model möglich; **direkte Bestimmung** von  $\Delta\alpha$
- **2-Para.-Fit**: 54/99 **Bifraktal-Fit**: 27/99 zusammen:  $\Delta\alpha = 0.29 \pm 0.14$
- 18/99 Niederschlagsreihen erfordern andere Modelle
- Bifraktal überwiegend schwach ausgeprägt
- $\Delta\alpha$  scheint unabhängig von klimatischen Faktoren zu sein

## Referenzen:

- JW Kantelhardt et al., Phys. A, 330 (2003) 240. (Abfluß- und Niederschlagszeitreihen)
- JW Kantelhardt et al., Phys. A, 316 (2002) 87. (MF-DFA)
- Y Tessier et al., J. Geophys. Res., 101 (1996) 26,427. (Lovejoy, Schertzer)

Wir danken dem BMBF und der Minerva Stiftung für finanzielle Unterstützung, außerdem H. Österle (PIK Potsdam) für die Bereitstellung der Daten.



# Standard Multifraktal-Formalismus

Klassischer multifraktaler Skalenexponent:  $\tau(q) = qh(q) - 1$

Singularitätsspektrum:  $f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$

Hölderexponent:  $\alpha = \frac{\partial \tau(q)}{\partial q}$

Breite des MF-Spektrums:  $\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$

