

## Von Maxwell zu Einstein

Arbeitsseminar: Historische, wissenschaftstheoretische und didaktische Aspekte der Elektrodynamik und Speziellen Relativitätstheorie

Leitung: Prof. Dr. phil. nat. Wilfried Kuhn

Institut für Didaktik der Physik der

Justus-Liebig-Universität Gießen

WS 2000/2001

Referent: Rybski, Diego

Die vollen Maxwellschen<sup>1</sup> Gleichungen wurden 1862 im Philosophical Magazine unter dem Titel "On Physical Lines of Force" veröffentlicht. Für Vakuum ( $\rho = 0; \vec{j} = 0$ ) lassen sie sich in folgender Weise schreiben:

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Es handelt sich dabei um partielle, lineare, gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung. Zur Entkopplung von (3) und (4) nutzt man:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (5)$$

Mit (2), (3) und (5) folgt also für (4) die homogene Wellengleichung:

$$\left( \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0 \quad (6)$$

Ein Vergleich mit der Wellengleichung aus der Mechanik<sup>2</sup> läßt

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (7)$$

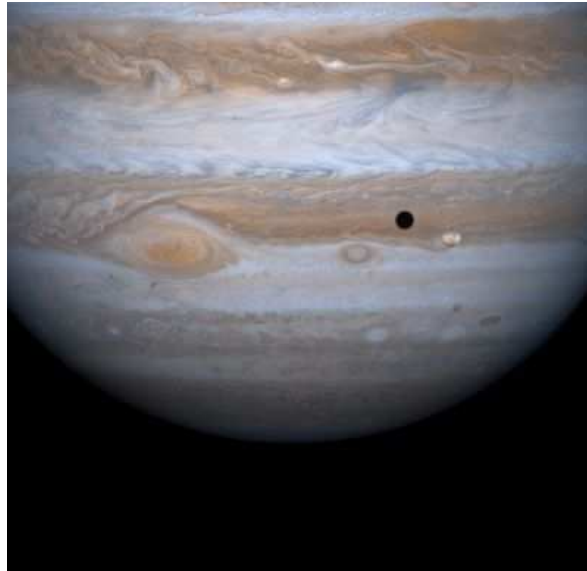
naheliegen.

---

<sup>1</sup>benannt nach James Clerk Maxwell, geb. am 13.6.1831 in Edinburgh, gest. am 5.11.1879 in Cambridge

<sup>2</sup> $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Demnach breiten sich elektromagnetische Wellen mit konstanter Lichtgeschwindigkeit  $c$ , die nicht von der Frequenz abhängt, aus. Römer<sup>3</sup> hatte sie bereits 1675 über die Bedeckung der Jupitermonde zu 227000km/s bestimmt und gab damit den ersten Hinweis auf ihre Endlichkeit.



Io vor Jupiter

Eine spezielle Lösung von (6) (ebenso der äquivalenten Darstellung für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ ) ist die monochromatische ebene Welle. Dies sind Wellen einer Frequenz, deren Wellenfronten Ebenen sind und sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehend entlang dieser bewegen. Man schreibt:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} \mp \omega t)} \quad (8)$$

Dabei heißt  $\vec{k}$  Wellenvektor, dessen Betrag  $k$  Wellenzahl und  $\omega$  Kreisfrequenz<sup>4</sup>. Je nach Wahl der Verknüpfung ( $\mp$ ) in (8) ist die Welle in  $\pm\vec{k}$ -Richtung orientiert.

Die Eulersche Formel<sup>5</sup>

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (9)$$

verdeutlicht den Schwingungscharakter in (8).

<sup>3</sup>Ole Römer, geb. am 25.9.1644 in Århus, gest. am 19.9.1710 in Kopenhagen

<sup>4</sup>Dispersionsrelation:  $\omega^2 = k^2 c^2$  (Ansatz in Wellengleichung)

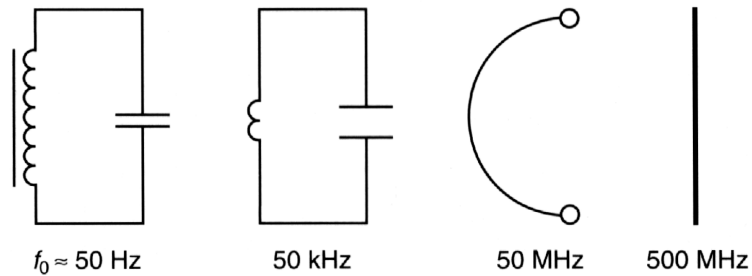
<sup>5</sup>benannt nach Leonhard Euler, geb. am 15.4.1707 in Basel, gest. am 18.9.1783 in St. Petersburg

Mit dem nach ihm benannten Dipol gelang Hertz<sup>6</sup> 1887 die Entdeckung der elektromagnetischen Wellen, womit die Maxwellsche Theorie bestätigt wurde.

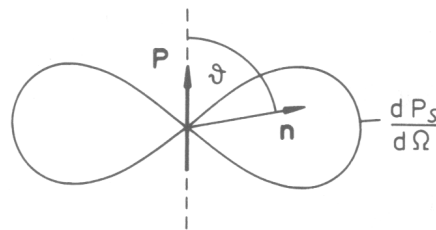
Zur Erläuterung kann man den elektromagnetischen Schwingkreis heranziehen. Nach der Thomsonschen<sup>7</sup> Gleichung ist die Eigenfrequenz gegeben durch:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (10)$$

”Biegt” man den Schwingkreis zu einem Stab, während die Induktivität  $L$  und die Kapazität  $C$  abnehmen - folglich wächst die Eigenfrequenz, so gelangt man zum Hertzschen Dipol.



In der Fernzone ( $kr \gg 1$ ) bilden  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{n}$  ein orthogonales Dreibein. Außerdem zeigt sich die  $\sin^2\vartheta$ -Dipolcharakteristik der Strahlungsleistung.



In der Nahzone ( $kr \ll 1$ ) entspricht das elektrische Feld, abgesehen von der harmonischen Zeitabhängigkeit, dem elektrischen Dipolfeld.

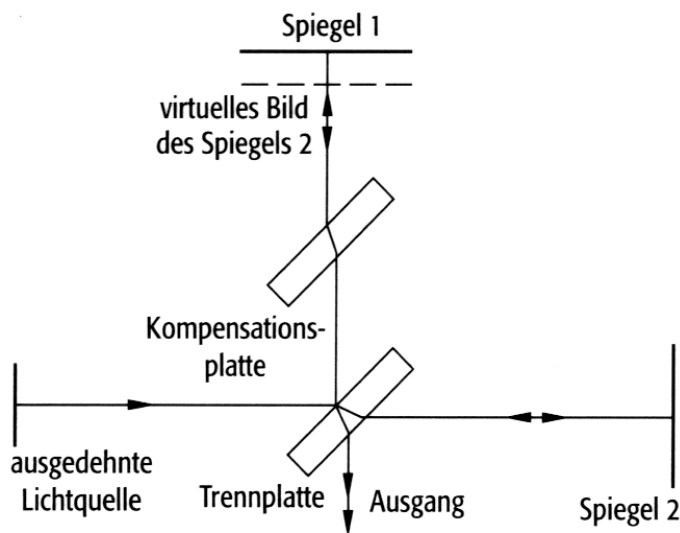
<sup>6</sup>Heinrich Rudolf Hertz, geb. am 22.2.1857 in Hamburg, gest. am 1.1.1894 in Bonn

<sup>7</sup>benannt nach Sir (seit 1866) William Thomson, seit 1892 Lord Kelvin of Largs, geb. am 26.6.1824 in Belfast, gest. am 17.12.1907 in Nethtergall (bei Largs, Schottland)

Im 19. Jahrhundert taten sich verschiedene Schwierigkeiten auf:

1. Nach der Galilei<sup>8</sup>-Transformation müßte sich die elektromagnetische Strahlung einer mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Beobachter bewegten Quelle mit  $c' = c \pm v$  ausbreiten. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Aussage, daß sich alle elektromagnetischen Wellen mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten.
2. Für die Existenz der elektromagnetischen Wellen benötigte man, analog zu Wasserwellen, Schallwellen oder den Schwingungen einer Saite, ein tragendes Medium, in dem sich diese Wellen ausbreiten könnten. Jener den ganzen Raum durchdringender hypothetischer Äther diente bereits in der Newtonschen Mechanik<sup>9</sup> dazu, die Fernkraft Gravitation auf eine elastische Deformation des Äthers und somit auf Nahwirkungskräfte zurückzuführen. Aufgrund der Meßungenauigkeiten glaubte man die Maxwell'schen Gesetze würden nur in einem im Äther ruhenden Inertialsystem gelten.

Michelson<sup>10</sup> und Morley<sup>11</sup> führten 1887 ein Experiment durch, das von der Idee her die Bewegung der Erde relativ zum Äther aufzeigen sollte.



Michelson Interferometer

<sup>8</sup>Galileo Galilei, geb. am 15.2.1564 in Pisa, gest. am 8.1.1642 in Arceti

<sup>9</sup>Sir Isaac Newton, geb. am 4.1.1643 in Woolsthorpe (bei Grantham), gest. am 31. 3.1727 in Kensington (gehört heute zu London)

<sup>10</sup>Albert Abraham Michelson, geb. am 19.12.1852 in Strelno (Posen), gest. am 9.5.1931 in Pasadena (Californien)

<sup>11</sup>Edward Williams Morley, geb. am 29.1.1838 in Newark (N.J., USA), gest. am 24.2.1938 in West Hartford (Connecticut)

Und zwar sollte sich die bei dem Versuch erzeugte Interferenzerscheinung, die aufgrund der unterschiedlichen Weglängen zweier Strahlengänge (senkrecht und parallel zur Erdbewegung) auftritt, ändern. Der negative Ausgang des Experiments erschüttert die Ätherhypothese in ihren Grundlagen. Mit Lasern ist es heute sogar möglich, Versuchsanordnungen aufzubauen, die selbst eine Erdgeschwindigkeit von 3cm/s im Äther registrieren würden.

Unabhängig voneinander schlugen Lorentz<sup>12</sup> 1892 und Fitzgerald<sup>13</sup> 1893 vor, daß jeder Körper in Richtung seiner Bewegung um den Faktor

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (11)$$

schrumpft, so daß keine Änderung der Phasendifferenz der beiden Strahlengänge zu beobachten ist. Man nennt dies Lorentz-Kontraktion:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (12)$$

( $l$  sei eine Länge des Körpers in dessen Bewegungsrichtung)

Mit dieser muß das Konzept des Äthers noch nicht verworfen werden. Schließlich konnte Lorentz sogar zeigen, daß die von ihm postulierte Kontraktion direkt aus der Theorie der elektromagnetischen Wellen ableitbar ist. Das Michelson-Experiment zeigt aber sehr wohl, daß die Messung einer Bewegung relativ zum absoluten System des Äthers nicht möglich ist.

Schließlich ging Einstein<sup>14</sup> 1905 in seinem Artikel "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"<sup>15</sup> von der Idee aus, daß man die Erdbewegung durch den Äther vielleicht deshalb nicht messen könne, weil der Äther gar nicht existiert! Er schreibt:

---

<sup>12</sup>Hendrik Antoon Lorentz, geb. am 18.7.1853 in Arnheim, gest. am 4.2.1928 in Haarlem

<sup>13</sup>Georg Francis Fitzgerald, geb. am 3.8.1852 in Dublin, gest. am 22.2.1901 in Dublin

<sup>14</sup>Albert Einstein, geb. am 14.3.1879 in Ulm, gest. am 18.4.1955 in Princeton (N.J., USA)

<sup>15</sup>in Annalen der Physik 17 (1905): 891-921; datiert mit Bern, Juni 1905; eingegangen am 30. Juni 1905; veröffentlicht am 26. September 1905

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit  $V$  fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum“ eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Nach Galilei gilt  $t = t'$ , d.h. die Zeit ist überall gleich. Die geometrische Betrachtung einer bewegten Lichtpulsuhr führt unter Berücksichtigung der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit zur sogenannten Zeitdilatation, also daß eine bewegte Uhr langsamer als die ruhende läuft.

$$\tau' = \tau \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (13)$$

( $\tau'$  sei die Periode der bewegten Uhr)

Dabei ist die Kontraktionshypothese notwendig für die Gültigkeit des Relativitätsprinzips. Die Zeitdilatation wirft verblüffende Fragen, wie etwa das Zwillingsparadoxon, auf.

Auch der Trouton<sup>16</sup>-Noble<sup>17</sup>-Versuch von 1903 scheitert und ist somit eine wichtige Stütze der Speziellen Relativitätstheorie. Bei exakter Gültigkeit der

<sup>16</sup>Frederick Thomas Trouton, geb. am 24.11.1863 in Dublin, gest. am 21.9.1921 in Dublin

<sup>17</sup>H. R. Noble ... ?

Galilei-Transformation müßte ein elektrischer Dipol auf sich selbst ein Drehmoment ausüben, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit und Orientierung gegen das Inertialsystem bewegt, in dem die Maxwell-Gleichungen gelten.

Letztendlich kann man die Lorentz-Transformation mit einer Transformationsmatrix im vierdimensionalen Minkowski<sup>18</sup>-Raum (in diesem hat der sogenannte Vierer-Vektor<sup>19</sup> die Form:  $x^\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict) = (\vec{x}, ict)$ ) behandeln:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (14)$$

Da alle Naturgesetze kovariant<sup>20</sup> beschrieben werden können, führt eine konsequente Betrachtung der Feldgrößen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in Viererschreibweise aus dem Vierer-Potential  $A^\mu = (A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}\varphi) = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$  zu den Komponenten

$$E_x = -ic(\partial^1 A^4 - \partial^4 A^1), \quad B_x = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \quad (15)$$

$$E_y = -ic(\partial^2 A^4 - \partial^4 A^2), \quad B_y = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \quad (16)$$

$$E_z = -ic(\partial^3 A^4 - \partial^4 A^3), \quad B_z = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1). \quad (17)$$

Wegen der einheitlichen Form dieser Gleichungen definiert man den Feldtensor<sup>21</sup>:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & \frac{i}{c}E_x \\ B_z & 0 & -B_x & \frac{i}{c}E_y \\ -B_y & B_x & 0 & \frac{i}{c}E_z \\ -\frac{i}{c}E_x & -\frac{i}{c}E_y & -\frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Das elektromagnetische Feld in Viererschreibweise wird also nur noch durch einen Tensor beschrieben. Beim Übergang zwischen zwei sich gegeneinander bewegenden Systemen werden die Komponenten  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  gemischt transformiert.

Die explizite kovariante Form der Maxwell-Gleichungen (inhomogene (19), homogene (20)) sieht nun folgendermaßen aus:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta \quad \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

$$\partial_\alpha F^{\beta\gamma} + \partial_\beta F^{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ beliebig aus } (1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

<sup>18</sup>Hermann Minkowski, geb. am 22.6.1864 in Aleksotas (Russisches Reich, jetzt Kaunas, Litauen), gest. am 12.1.1909 in Göttingen

<sup>19</sup>Tensor erster Stufe

<sup>20</sup>Kovarianz heißt dabei, daß sich die Form einer Gleichung unter der Lorentz-Transformation nicht ändert (Äquivalenz aller Inertialsysteme).

<sup>21</sup>antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe, also 6 unabhängige Komponenten

Merke: In allen Bezugssystemen ist die Lichtgeschwindigkeit gleich groß, und dieselben Maxwell'schen Gesetze haben ihre Gültigkeit. Alle Naturgesetze behalten ihre Gültigkeit in beliebigen Inertialsystemen.

Literatur:

- Bader, F.; Dorn, F., 1986: Physik - Oberstufe Gesamtband 12/13, Würzburg.
- Cassing, W., 1999: Elektrodynamik - Script zur Vorlesung, Gießen.
- Grehn (Hg.), J., 1992: Metzler Physik, 2. Aufl., Hannover.
- Greiner, W.: Theoretische Physik - Band 2: Mechanik, Teil 2, Frankfurt a.M.
- Greiner, W., 1991: Theoretische Physik - Band 3: Klassische Elektrodynamik, 5. Aufl., Frankfurt a.M.
- Greiner, W.; Rafelski, J., 1989: Theoretische Physik - Band 3A: Spezielle Relativitätstheorie, 2. Aufl., Frankfurt a.M.
- Greulich [Hrsg.], W., 1998: Lexikon der Physik, Heidelberg.
- Kuhn, W., 1990: Physik - Band 2 (12/13), 1. Aufl., Braunschweig.
- Nolting, W., 1990: Grundkurs: Theoretische Physik - 3. Band: Elektrodynamik, 3. Aufl., Ulmen.
- Nolting, W., 1997: Grundkurs: Theoretische Physik - 4. Band: Spezielle Relativitätstheorie u. Thermodynamik, 3. Aufl., Braunschweig/Wiesbaden.
- Sexl, R.; Schmidt, H. K., 1991: Raum - Zeit - Relativität, 3. Aufl., Braunschweig.
- Stachel, J., 1989: The Collected Papers of Albert Einstein - Volume 2 (The Swiss Years: Writings, 1900-1909), Princeton.